

# CAHIER DU LAMSADE

Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision  
(Université Paris-Dauphine)  
Unité de Recherche Associée au CNRS n° 825

## UNE METHODOLOGIE MULTICRITERE POUR LA VERIFICATION DES ACCORDS SUR LE CONTROLE DES ARMEMENTS EN EUROPE <sup>1</sup>

CAHIER N° 134  
février 1996

P. JOURNEE <sup>2</sup>  
P. PERNY <sup>3</sup>  
D. VANDERPOOTEN <sup>4</sup>

reçu : septembre 1995.

---

<sup>1</sup> Remerciements : Ce travail a été mené en collaboration et avec le soutien de la Direction de la Recherche et de la Technologie de la Délégation Générale à l'Armement (DGA/DRET).

<sup>2</sup> DGA – Centre d'Analyse de Défense, 16 bis avenue Prieur de la Côte d'Or, 94114 Arcueil Cedex, France.

<sup>3</sup> LAFORIA-IBP, Université Paris 6, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.

<sup>4</sup> LAMSADE, Université Paris-Dauphine, Place du Maréchal De Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France.

# Table des Matières

Abstract/Résumé .....	i
<b>1 Introduction .....</b>	<b>1</b>
<b>2 Structuration du problème .....</b>	<b>2</b>
<b>2.1 Les critères retenus .....</b>	<b>2</b>
<b>2.2 L'interprétation des critères .....</b>	<b>3</b>
<b>2.3 Elaboration des critères .....</b>	<b>4</b>
2.3.1 Critère $g_1$ : Intérêt géographique .....	4
2.3.2 Critère $g_3$ : Connaissance du site .....	5
2.3.3 Critère $g_4$ : Confiance .....	5
<b>2.4 Elaboration du critère <math>g_2</math> : Efficacité Opérationnelle .....</b>	<b>6</b>
2.4.1 Détermination d'un degré d'efficacité $EFF_k$ pour chaque ELT de type $k$ .....	8
2.4.2 Détermination de l'efficacité potentielle $EFFPOT_i$ du site $s_i$ .....	8
2.4.3 Détermination de l'efficacité opérationnelle $EFFOP_i$ du site $s_i$ .....	9
2.4.4 Elaboration du critère $g_2$ .....	9
<b>2.5 Tableau des priorités .....</b>	<b>9</b>
<b>3 Elaboration d'une procédure multicritère de rangement .....</b>	<b>10</b>
<b>3.1 Différentes attitudes pour l'agrégation de priorités partielles .....</b>	<b>11</b>
<b>3.2 Choix d'un critère unique de synthèse pour le problème des sites .....</b>	<b>12</b>
3.2.1 Opérateurs d'agrégation conjonctifs (vérifiant $P_1, P_2, P_3, P_4$ ) .....	12
3.2.2 Opérateurs d'agrégation disjonctifs (vérifiant $P_1, P_2, P_3, P_5$ ) .....	13
3.2.3 Opérateurs d'agrégation de compromis (vérifiant $P_1, P_2, P_3, P_6$ ) .....	13
<b>3.3 Application à l'exemple illustratif .....</b>	<b>15</b>
<b>4 Exploitation des résultats .....</b>	<b>16</b>
<b>4.1 Exploitation robuste des résultats .....</b>	<b>17</b>
4.1.1 Constitution d'intervalles de priorité sur les sites .....	17
4.1.2 Comparaison des intervalles de priorité .....	19
4.1.3 Exploitation de l'ordre d'intervalle défini sur les sites .....	21
<b>4.2 Mise en oeuvre pratique .....</b>	<b>22</b>
4.2.1 Exploitation pratique d'une liste .....	22
4.2.2 Insertion de la méthodologie proposée dans le cadre de la répartition des inspections au sein de l'Alliance .....	22
<b>5 Conclusion .....</b>	<b>24</b>
<b>Références .....</b>	<b>26</b>

# **A multicriteria methodology for the verification of arms control agreements in Europe**

## **Abstract**

This paper presents a multicriteria decision aid methodology for the selection of sites to be inspected for arms control in Europe. This study takes place within the framework of the verification of conventional forces in Europe. The criteria used in the analysis are first presented in detail. Then, we develop a multicriteria aggregation procedure designed to rank the sites by decreasing order of priority. In order to derive robust prescriptions, we propose a general and original approach allowing to handle imprecision and ill-determination concerning preference information.

# **Une méthodologie multicritère pour la vérification des accords sur le contrôle des armements en Europe**

## **Résumé**

Cet article présente une méthodologie multicritère d'aide à la décision pour le problème du choix de sites à inspecter pour le contrôle des armements en Europe. Cette étude s'inscrit dans le cadre de la vérification des forces conventionnelles en Europe. Nous présentons tout d'abord les critères jugés pertinents pour l'analyse ainsi que leur mode de construction. Nous proposons ensuite une procédure d'agrégation multicritère permettant de classer les sites par ordre de priorités décroissantes. Enfin, nous introduisons une approche originale et de portée générale permettant de prendre en compte de manière robuste l'imprécision et l'indétermination affectant l'information préférentielle.

## 1 Introduction

Les accords de Paris, signés en Novembre 1990, concernant la limitation des forces conventionnelles en Europe conduisent à instaurer des procédures de vérification. Celles-ci reposent sur des inspections mutuelles de certains des sites où sont implantés les matériels contingentés appelés *Eléments Limités par Traité* (ELT). Chaque pays de l'Alliance doit ainsi sélectionner un certain nombre de sites à inspecter suivant le quota qui lui est attribué. La sélection de chaque pays est déterminée selon l'intérêt qu'il accorde aux divers sites. La répartition des sites s'effectue en plusieurs tours de choix au cours desquels chaque pays épuise une partie de son quota. A chaque tour, la sélection d'un pays doit donc tenir compte des choix déjà effectués par les autres pays alliés de manière à éviter des vérifications redondantes.

Le processus de sélection s'inscrit donc dans un environnement complexe où coexistent des contraintes endogènes (respect des quotas) et exogènes (sélections antérieures des autres pays). Cette complexité est encore accrue par la multiplicité des points de vue à prendre en compte. Nous proposons dans cet article une méthodologie multicritère d'aide à la décision visant à préparer cette sélection en tenant compte de ces diverses contraintes. Notons que le problème de sélection de sites pour l'inspection a souvent été étudié dans le contexte de la théorie des jeux où il s'agit de déterminer une stratégie optimale de sélection compte-tenu des possibilités de dissimulation de chacune des parties (cf. Avenhaus et Von Stengel (1991), Brams et al. (1991)). Même si notre analyse intègre des aspects liés à la confiance, nous appréhendons le problème de sélection de sites également à travers des aspects stratégiques tels que l'efficacité opérationnelle du site et son intérêt géographique.

Nous présentons tout d'abord les critères jugés pertinents pour évaluer la priorité accordée à la visite d'un site. Nous nous attachons également à définir de façon précise et opérationnelle le mode de construction de chacun des critères envisagés (section 2). Chaque site ayant été valorisé sur chacun des critères retenus, il convient d'apprécier globalement son intérêt. Pour ce faire, après avoir examiné différentes fonctions d'agrégation, nous proposons une procédure d'agrégation multicritère permettant d'obtenir une liste de sites rangés selon leur intérêt décroissant (section 3). Nous proposons ensuite un mode d'exploitation robuste d'une telle liste tenant compte des choix déjà effectués par les autres pays alliés (section 4). Les différentes phases de la méthodologie proposée sont illustrées sur un exemple simplifié.

## 2 Structuration du problème

### 2.1 La problématique décisionnelle

Considérant un ensemble de sites candidats  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ , le problème décisionnel consiste à identifier le sous-ensemble des sites dont la visite semble prioritaire. La prise en compte de contraintes limitant les possibilités de sélection (quotas, choix antérieurs des alliés) ne permet pas toujours de réaliser une sélection idéale. En effet, d'une part une telle sélection peut ne pas respecter les quotas, d'autre part certains sites intéressants auront pu disparaître. Dès lors, plutôt que de chercher à dégager un sous-ensemble de sites intéressants, il s'avère plus adapté de classer tous les sites de  $S$  par ordre de priorité décroissante. La liste ordonnée ainsi constituée est exploitée dynamiquement en fonction des choix alliés et jusqu'à épuisement du quota.

Par la suite, nous illustrerons divers points de la méthodologie présentée en exploitant des informations extraites d'une base de données concernant des sites réels. Nous nous limiterons ici à un ensemble  $S$  contenant 20 sites. Chaque site est caractérisé par un certain nombre de paramètres (localisation géographique, dotations en ELT, niveau opérationnel de l'unité,...).

### 2.1 Les critères retenus

Considérant un ensemble à classer selon un ordre de priorité décroissant, il s'agit d'élaborer des critères  $g_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) reflétant les différents points de vue pertinents. En concertation avec les experts français, les quatre critères suivants ont pu être dégagés :

- $g_1$  : *intérêt géographique* du site  
Ce critère vise à modéliser le danger potentiel que représente un site compte-tenu de sa localisation géographique.
- $g_2$  : *efficacité opérationnelle* du site  
Ce critère fait intervenir quatre dimensions :
  - la capacité offensive des ELT disposés sur le site
  - la vétusté des ELT disposés sur le site
  - le niveau opérationnel de l'unité
  - la taille de l'unité
- $g_3$  : *connaissance* du site  
Ce critère traduit l'adéquation entre les déclarations relatives à un site à inspecter et les informations déjà obtenues sur ce site.
- $g_4$  : *confiance* envers le pays où est implanté le site.  
Ce critère reflète la confiance que l'on peut accorder aux déclarations d'un pays en fonction de la fiabilité des informations fournies lors des contrôles antérieurs.

Notons que les critères  $g_1, g_3, g_4$  ne sont fondés que sur une dimension élémentaire alors que le critère  $g_2$  en fait intervenir quatre.

De plus, compte-tenu de leur sémantique, aucun de ces critères n'admet d'échelle naturelle sous-jacente.  $g_1, g_3$ , et  $g_4$  reflètent des appréciations en partie qualitatives alors que  $g_2$  fait intervenir des dimensions hétérogènes dont certaines résultent d'avis d'experts.

Par ailleurs, il est apparu que les experts, de par leur culture, sont naturellement enclins à valoriser les performances par des coefficients variant entre 0 et 1.

## 2.2 L'interprétation des critères

Compte-tenu des remarques précédentes, il a été décidé de construire chaque critère  $g_j$  comme une fonction définie sur  $S$  à valeurs dans  $[0,1]$  telle que la quantité  $p_{ij} = g_j(s_i)$  puisse être interprétée comme le degré d'intérêt que représenterait la visite du site  $s_i$  selon le point de vue modélisé par le critère  $g_j$ . La quantité  $p_{ij}$  constitue alors une bonne indication de la *priorité* à accorder à la visite du site  $s_i$ .

En particulier, on a :

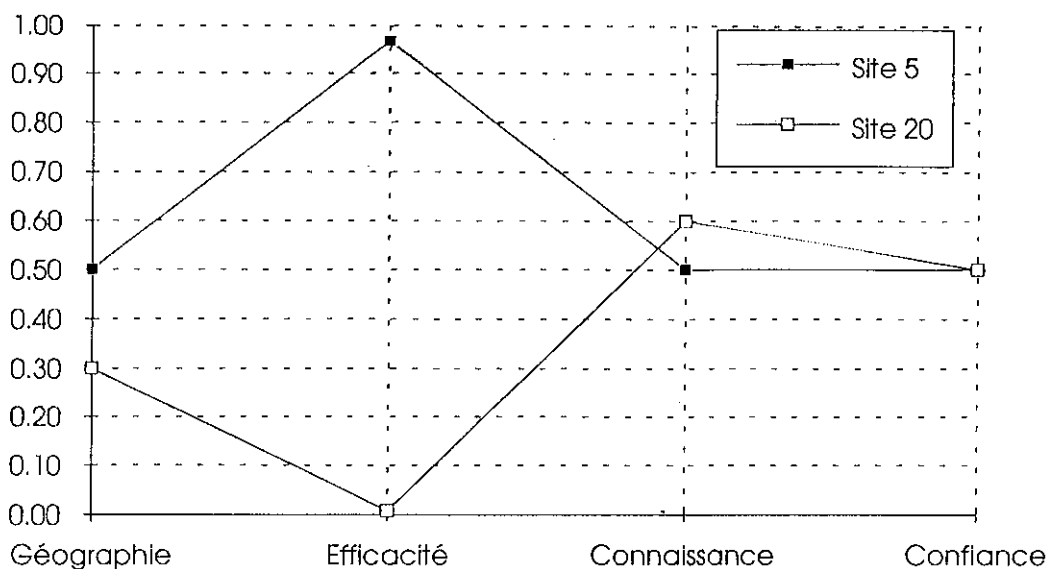
- $p_{ij} = 1$  si le point de vue modélisé par le critère  $g_j$  justifie d'accorder une priorité immédiate à la visite de  $s_i$ .
- $p_{ij} = 0$  si le point de vue modélisé par le critère  $g_j$  ne constitue en aucune manière un élément justifiant, à court terme tout au moins, une visite de  $s_i$ .

Notre hypothèse de travail consiste à fonder la modélisation sur une échelle de priorité *absolue* que l'on utilisera :

- au niveau de chaque critère, ce qui devra guider leur mode d'élaboration,
- au niveau global, ce qui permettra d'interpréter de façon intrinsèque la priorité de visite attribuée à chaque site.

Cette échelle est conçue de façon à admettre la valeur 0,5 comme échelon neutre (cf. Bana e Costa (1992)). Ainsi, en l'absence de toute contrainte exogène (quotas, choix des alliés, ...), la visite d'un site de priorité supérieure à 0,5 devrait être jugée souhaitable. Inversement, la visite d'un site de priorité inférieure à 0,5 ne paraît pas suffisamment motivée. Par conséquent, la valeur 0,5 traduit une situation théorique d'hésitation parfaite quant à la nécessité d'effectuer une visite.

Chaque site  $s_i \in S$  peut être caractérisé par un point du pavé  $[0,1]^m$  représentant le vecteur de priorités  $(p_{i1}, \dots, p_{im})$  dans l'espace des critères. La figure 1 fournit une visualisation graphique des sites  $s_5$  et  $s_{20}$  dans cet espace.



**Figure 1 :** Représentation de  $s_5$  et  $s_{20}$

### 2.3 Elaboration des critères

Les experts français ont valorisé chacune des dimensions élémentaires intervenant dans les quatre critères selon l'interprétation présentée au § 2.2. Les critères  $g_1$ ,  $g_3$  et  $g_4$ , qui s'assimilent à des dimensions élémentaires, sont relativement faciles à valoriser (le critère  $g_4$  qui fait l'objet d'une valorisation dynamique constitue un cas particulier). Nous précisons ci-après le mode d'élaboration de ces trois critères. Le critère  $g_2$ , dont l'élaboration est plus complexe, fera l'objet du § 2.4.

#### 2.3.1 Critère $g_1$ : Intérêt géographique

Ce critère est exprimé au niveau de chaque zone géographique (pays ou district). En première approximation, il est valorisé de façon inversement proportionnelle à la distance entre le pays visiteur et la zone concernée. Les experts français ont ainsi attribué une évaluation à chaque zone géographique selon ce principe général. En fait, trois catégories de zones ont été distinguées par les experts (*zone bleue*, *zone verte*, *zone jaune*). Chaque zone géographique se voit ainsi attribuer une couleur à laquelle correspond une évaluation.

L'évaluation de chaque site s'effectue simplement en utilisant l'évaluation de la zone où ce site se trouve implanté.

### 2.3.2 Critère $g_3$ : Connaissance du site

Ce critère est défini pour chacun des sites. Précisons qu'il s'agit en fait de définir un degré de *non connaissance* (la valeur 1 correspondant à un site très mal connu et donc prioritaire, de ce point de vue, pour une visite). Nous proposons de le valoriser à partir de la formule suivante :

$$g_3(s_i) = \max \left\{ \frac{e_i - a_i}{e_i}, 0 \right\}$$

où -  $a_i$  : nombre d'ELT *annoncés* sur le site  $s_i$   
 -  $e_i$  : nombre d'ELT *estimés* sur le site  $s_i$  (sources nationales ou alliées).

### 2.3.3 Critère $g_4$ : Confiance

A la différence du critère précédent, ce critère est exprimé au niveau de chaque district. Il vise à refléter la propension des autorités du district à fournir des renseignements inexacts. Précisons qu'il s'agit ici de définir un degré de *non confiance* (la valeur 1 correspondant à un site implanté dans un district vis-à-vis duquel la confiance est très limitée, ce site étant donc prioritaire, de ce point de vue, pour une visite).

Comme dans le cas du critère  $g_1$ , l'évaluation de chaque site s'effectue simplement en utilisant l'évaluation du district où ce site se trouve implanté.

Dans une phase initiale (avant toute vérification), compte-tenu des évolutions politiques récentes, il a été décidé d'accorder un degré de confiance identique à chacun des districts et, par conséquent, à chacun des sites. La valeur choisie est celle de l'échelon neutre 0,5.

A mesure que les vérifications se dérouleront, les violations du traité constatées sur certains districts conduiront à privilégier ceux-ci pour de futures visites. Nous suggérons de recourir à une formule de type lissage exponentiel permettant de revaloriser simplement le critère  $g_4$  à l'année  $t$  en fonction des visites effectuées entre l'année  $t-1$  et l'année  $t$ . Ainsi, chaque district  $z$  est mis à jour selon la formule suivante :

$$g_4^t(z) = \alpha \cdot g_4^{t-1}(z) + (1-\alpha) \cdot c_z^t$$

où  $g_4^0(z) = 0,5$  ,  $\alpha = 0,5$  et  $c_z^t = \max \left\{ \frac{v_z^t - a_z^t}{v_z^t}, 0 \right\}$  avec



- $a_z^t$  : nombre total d'ELT *annoncés* sur les différents sites du district  $z$  qui ont été visités entre l'année  $t-1$  et l'année  $t$ .
- $v_z^t$  : nombre total d'ELT *vus* sur les différents sites du district  $z$  qui ont été visités entre l'année  $t-1$  et l'année  $t$ .

*Remarque* : Nous nous sommes situés en phase initiale, avant vérification, et avons donc retenu :  $p_{i4} = g_4(s_i) = 0,5$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Notons que, compte-tenu de ce choix, le critère  $g_4$  ne joue aucun rôle discriminant dans le cadre de l'exemple illustratif. Il en irait bien sûr tout autrement en période de vérification où la formule indiquée ci-dessus conduirait à discriminer les différents districts.

## 2.4 Elaboration du critère $g_2$ : Efficacité Opérationnelle

Ce critère fait intervenir quatre dimensions, les deux premières étant liées à l'évaluation des ELT et les deux suivantes à celle des unités :

- la capacité offensive des ELT disposés sur le site,
- la non vétusté des ELT disposés sur le site,
- le niveau opérationnel de l'unité,
- la taille de l'unité.

Il s'agit donc de sous-agréger ces quatre dimensions pour élaborer  $g_2$ .

Une première difficulté survient lorsque l'on considère les dimensions liées à l'évaluation des ELT (capacité offensive et vétusté). Il est apparu très difficile aux experts de relativiser ces évaluations pour des ELT aussi dissemblables que ceux de l'armée de Terre (chars, véhicules de combat d'infanterie, pièces d'artillerie) et ceux de l'armée de l'Air (avions). En revanche, il a semblé possible de relativiser la capacité offensive et la vétusté des différents types de matériel que l'on trouve au sein d'une même armée. Il apparaît donc souhaitable d'effectuer, sur ces deux dimensions, des valorisations indépendantes. Ceci nous oblige alors à considérer séparément, dans la suite de l'étude, armée de Terre et armée de l'Air et à construire des listes de priorité indépendantes. Nous montrerons au § 4.2 comment utiliser de telles listes.

Les informations recueillies auprès des experts concernant les trois premières dimensions sont les suivantes :

- *capacité offensive* : Chaque type de matériel a été valorisé par un coefficient compris entre 0 et 1 (0 constituant une capacité offensive négligeable et 1 une capacité offensive importante).

Nous disposons donc, pour chaque ELT de type  $k$ , d'une évaluation  $OFF_k$ .

- *non vétusté* : Chaque type de matériel a été valorisé par un coefficient compris entre 0 et 1 (0 traduisant une vétusté très importante et 1 une vétusté négligeable). Celui-ci est directement proportionnel à l'âge des ELT. Les règles de valorisation retenues par les experts sont les suivantes :

Matériels terrestres :

- années 1950 à 1965 : 0,6
- années 1966 à 1980 : 0,8
- années postérieures à 1980 : 1

Aéronefs :

- années 1960 à 1970 : 0,5
- années 1971 à 1980 : 0,7
- années postérieures à 1980 : 1

Ce coefficient, pour chaque ELT de type  $k$ , est noté  $NVET_k$ .

- *niveau opérationnel* : Trois types d'unités ont été distingués en fonction du pourcentage de l'effectif présent en temps de paix par rapport à l'effectif total et du délai de mobilisation. Les valeurs suivantes ont été attribuées :
  - unités d'active (effectif : 70 à 100 % - délai : 24 à 48 h.) : 1
  - unités de réserve (effectif : 20 à 70 % - délai : env. une semaine) : 0,5
  - unités de mobilisation (effectif : 5 à 20 % - délai : env. un mois) : 0,2
 Nous disposons donc, pour chaque site  $s_i$ , d'un coefficient noté  $NIVOP_i$ .

Par ailleurs, il a été décidé d'appréhender la dimension *taille* de l'unité en fonction des dotations pour chaque type d'ELT présent sur le site. Nous disposons, pour chaque site  $s_i$ , des dotations  $d_i^k$  en ELT de type  $k$ .

Afin de construire le critère  $g_2$ , l'articulation de ces quatre aspects est réalisée selon les étapes suivantes :

1. Détermination d'un degré d'efficacité  $EFF_k$  pour chaque ELT de type  $k$  en fonction de  $OFF_k$  et  $NVET_k$ .
2. Détermination de l'efficacité potentielle  $EFFPOT_i$  du site  $s_i$  en fonction de  $EFF_k$  et de  $d_i^k$ .
3. Détermination de l'efficacité opérationnelle  $EFFOP_i$  du site  $s_i$  en fonction de  $EFFPOT_i$  et de  $NIVOP_i$ .
4. Elaboration du critère  $g_2$ , traduisant le degré d'efficacité opérationnelle, à partir d'un recodage de  $EFFOP_i$ .

Nous détaillons maintenant chacune de ces quatre étapes, précisant ainsi le mode de construction de  $g_2$ .

### 2.4.1 Détermination d'un degré d'efficacité $EFF_k$ pour chaque ELT de type $k$

Cette étape permet d'identifier un degré d'efficacité pour chaque type d'ELT, servant ainsi de base à la valorisation des sites sur lesquels sont implantés certains de ces ELT.

Considérant un ELT de type  $k$ , son degré d'efficacité est appréhendé à travers la relation suivante :

$$EFF_k = OFF_k \times \frac{NVET_k + 1}{2}$$

Cette relation indique que l'efficacité d'un ELT correspond à sa capacité offensive modulée selon la vétusté de l'ELT. Cette modulation est conçue de façon à ce que :

- dans le meilleur des cas (matériel récent :  $NVET_k = 1$ ), l'efficacité d'un ELT correspond à sa capacité offensive,
- dans le pire des cas (matériel vétuste - matériel terrestre :  $NVET_k = 0,6$  aéronef :  $NVET_k = 0,5$ ), l'efficacité d'un ELT correspond à 80% (matériel terrestre) ou 75% (aéronef) de sa capacité offensive.

ex. :

- Pour un char de type C1 (moderne), on a  $OFF_{C1} = 1$  et  $NVET_{C1} = 1$  d'où  $EFF_{C1} = 1$ .
- Pour un char de type C2 (ancien), on a  $OFF_{C2} = 0,6$  et  $NVET_{C2} = 0,6$  d'où  $EFF_{C2} = 0,48$ .
- Pour un véhicule blindé de type V1 (relativement moderne), on a  $OFF_{V1} = 0,2$  et  $NVET_{V1} = 0,8$  d'où  $EFF_{V1} = 0,18$ .
- Pour un véhicule blindé de type V2 (ancien), on a  $OFF_{V2} = 0,1$  et  $NVET_{V2} = 0,6$  d'où  $EFF_{V2} = 0,08$ .

### 2.4.2 Détermination de l'efficacité potentielle $EFFPOT_i$ du site $s_i$

L'efficacité potentielle d'un site dépend des types de matériels qui s'y trouvent implantés ainsi, bien entendu, que des dotations correspondantes. Ceci nous conduit à la relation suivante, pour chaque site  $s_i$  :

$$EFFPOT_i = \sum_k d_i^k \cdot EFF_k$$

ex. : le site  $s_1$  disposant des dotations suivantes :

V1 : 11, V2 : 10, C2 : 31,

on a :  $EFFPOT_1 = (11 \times 0,18) + (10 \times 0,08) + (31 \times 0,48) = 17,66$ .

### 2.4.3 Détermination de l'efficacité opérationnelle $EFFOP_i$ du site $s_i$

L'efficacité opérationnelle d'un site dépend de son efficacité potentielle ainsi que de la façon dont on peut mobiliser cette efficacité potentielle. Ceci nous conduit à la relation suivante pour chaque site  $s_i$  :

$$EFFOP_i = EFFPOT_i \cdot NIVOP_i$$

ex. : le site  $s_1$  correspond à une unité de mobilisation :  $NIVOP_1 = 0,2$   
d'où  $EFFOP_1 = 17,66 \times 0,2 = 3,53$ .

Notons qu'un site fictif  $s_f$  correspondant à une unité d'active constituée d'un bataillon de chars C1 (30 chars) se verrait attribuer une efficacité opérationnelle  $EFFOP_f = 30$ , alors qu'un site fictif  $s_g$  correspondant à une unité de réserve constituée d'un bataillon de chars C1 obtiendrait une efficacité opérationnelle  $EFFOP_g = 15$ .

### 2.4.4 Elaboration du critère $g_2$

Il s'agit maintenant de recoder  $EFFOP_i$  afin de construire le degré d'intérêt que représenterait la visite du site  $s_i$  du point de vue de l'efficacité opérationnelle. Ce codage doit être réalisé de façon à prendre en compte l'attitude des experts. Il est apparu raisonnable d'utiliser pour ce codage une fonction de valeur  $v$  concave traduisant l'idée que toute menace, en termes d'efficacité opérationnelle, devient rapidement significative. Une différence de performance dans la partie basse de l'échelle de l'indicateur  $EFFOP$  est ainsi davantage valorisée qu'une différence de même amplitude en haut de cette échelle. La forme classique suivante a été retenue :

$$v(x) = 1 - e^{-\alpha x}$$

Afin de calibrer cette fonction, il convient de fixer la valeur  $\alpha$ . Celle-ci a été déterminée en considérant qu'un site, tel que le site fictif  $s_g$  introduit ci-dessus (cf. § 2.4.3), constitue, du point de vue de l'efficacité opérationnelle, un niveau de menace intermédiaire pour lequel l'échelon neutre paraît justifié. En revanche, un site tel que  $s_f$  constitue un niveau de menace significatif. Nous avons donc fixé  $\alpha = (\ln 2)/15$  afin d'obtenir  $v(EFFOP_g) = v(15) = 0,5$  et  $v(EFFOP_f) = v(30) = 0,75$ .

ex. : Pour le site  $s_1$ , nous avons :  $p_{21} = g_2(s_1) = v(3,53) = 0,15$ .

## 2.5 Tableau des priorités

Le mode de construction de chacun des critères ayant été défini, il est possible de construire le tableau des priorités. Nous présentons ci-après le tableau correspondant à l'exemple illustratif (figure 2). Les poids consignés dans ce tableau n'ont qu'une valeur indicative compte-tenu du caractère confidentiel de ces informations. Ces coefficients sont déterminés en collaboration avec les experts français. De plus, compte-tenu du caractère nécessairement arbitraire de toute procédure d'estimation de paramètres préférentiels, nous montrons plus loin (§ 4.1) comment intégrer de manière prudente dans l'analyse les coefficients obtenus.

Sites	$g_1$ Géographie	$g_2$ Efficacité	$g_3$ Connaiss.	$g_4$ Confiance
$s_1$	0.80	0.15	0.60	0.50
$s_2$	0.30	0.20	0.70	0.50
$s_3$	0.80	0.36	0.60	0.50
$s_4$	0.50	0.92	0.50	0.50
$s_5$	0.50	0.97	0.50	0.50
$s_6$	0.50	0.92	0.50	0.50
$s_7$	0.80	0.71	0.60	0.50
$s_8$	0.30	0.48	0.60	0.50
$s_9$	0.30	0.27	0.80	0.50
$s_{10}$	0.80	0.19	0.50	0.50
$s_{11}$	0.80	0.41	0.60	0.50
$s_{12}$	0.30	0.38	0.50	0.50
$s_{13}$	0.80	0.73	0.50	0.50
$s_{14}$	0.80	0.38	0.50	0.50
$s_{15}$	0.80	0.63	0.50	0.50
$s_{16}$	0.30	0.09	0.70	0.50
$s_{17}$	0.30	0.23	0.70	0.50
$s_{18}$	0.30	0.02	0.60	0.50
$s_{19}$	0.80	0.02	0.60	0.50
$s_{20}$	0.30	0.01	0.60	0.50
<b>Min</b>	0.30	0.01	0.50	0.50
<b>Max</b>	0.80	0.97	0.80	0.50
<b>Moy</b>	0.56	0.40	0.59	0.50
<b>Poids</b>	0.10	0.40	0.30	0.20

Figure 2 : Tableau des priorités

### 3 Elaboration d'une procédure multicritère de rangement

Disposant maintenant du *tableau des priorités* caractérisé par la donnée des quantités  $p_{ij}$  ( $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ ),  $p_{ij}$  reflétant le degré de priorité à accorder au site  $s_i$  selon le critère  $g_j$ , il nous faut nécessairement prendre un certain nombre d'options quant à la manière dont on va exploiter ces informations pour bâtir un modèle des priorités globales. Nous abordons donc maintenant le problème de l'*agrégation multicritère* dont l'objet est de passer d'un modèle désagrégé des priorités à un modèle global et synthétique.

Il nous semble opportun de poser ici le problème de l'agrégation multicritère en termes de recherche d'une règle ou fonction d'agrégation permettant de construire, pour tout site  $s_i$  un degré de priorité globale  $p_i$ . Ce degré de priorité est une note synthétique établie sur la base du vecteur de priorités  $(p_{i1}, \dots, p_{im})$ , et de coefficients d'importance (poids)  $w_j$  permettant de moduler les impacts relatifs des critères (géographie, efficacité, connaissance, confiance) dans le calcul de la priorité globale. Les coefficients  $w_j$  sont supposés positifs et sommant à un. Le choix d'une fonction d'agrégation particulière déterminera alors un critère unique de synthèse permettant d'ordonner les sites par priorités décroissantes.

### 3.1 Différentes attitudes pour l'agrégation de priorités partielles

Notons  $h$  une fonction d'agrégation de priorités qui, par définition, est telle que  $p_i = h(p_{i1}, \dots, p_{im})$  pour tout  $i$ . Pour jouer le rôle qui lui est dévolu dans l'agrégation,  $h$  doit vérifier les propriétés suivantes (cf. Dubois et Prade (1984, 1985)):

$P_1$  : *Conditions aux limites*

$$h(0, 0, \dots, 0) = 0 ; h(1, 1, \dots, 1) = 1;$$

La priorité minimale est théoriquement 0 tandis que la priorité maximale est théoriquement 1.

$P_2$  : *Monotonie*

$$\forall (u_1, \dots, u_m) \in [0, 1]^m, \forall (v_1, \dots, v_m) \in [0, 1]^m, \\ (\forall j \in \{1, \dots, m\}, u_j \geq v_j) \Rightarrow (h(u_1, \dots, u_m) \geq h(v_1, \dots, v_m))$$

La visite d'un site  $s_k$  doit toujours prendre la priorité (globalement) sur celle du site  $s_l$  si les deux sites  $s_k$  et  $s_l$  sont tels que, sur chacun des critères, la visite de  $s_k$  est jugée prioritaire sur celle de  $s_l$ .

$P_3$  : *Continuité*

La fonction  $h$  est continue sur l'intervalle  $[0, 1]^m$ .

Cette dernière condition, jointe à  $P_1$ , nous assure notamment que, pour tout  $x \in [0, 1]$ , il existe un vecteur de priorités partielles  $(p_{i1}, \dots, p_{im})$  correspondant à un site fictif  $s_i$  tel que  $x = h(p_{i1}, \dots, p_{im})$ . Autrement dit, le degré de priorité globale d'un site peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

A partir de ces conditions minimales, on peut distinguer quatre types d'opérateurs reflétant des attitudes diverses dans la manière d'agréger les priorités partielles.

- Une attitude exprimant la satisfaction simultanée des objectifs (*modèle conjonctif*) se traduit naturellement par la propriété :

$$P_4 : \forall (u_1, \dots, u_m) \in [0, 1]^m, h(u_1, \dots, u_m) \leq \min(u_1, \dots, u_m)$$

L'obtention d'une priorité globale élevée passe par l'attribution de degrés de priorité partielle élevés sur *tous* les critères.

- A l'opposé, une attitude exprimant la satisfaction d'au moins un objectif (*modèle disjonctif*) se traduit naturellement par la propriété :

$$P_5 : \forall (u_1, \dots, u_m) \in [0, 1]^m, h(u_1, \dots, u_m) \geq \max(u_1, \dots, u_m)$$

L'obtention d'une priorité globale élevée passe par l'attribution de degrés de priorité partielle élevés sur *au moins un* des critères.

- Une attitude exprimant le compromis sera nécessairement intermédiaire entre ces deux extrêmes, ce qui se traduit naturellement par :

$$P_6 : \forall (u_1, \dots, u_m) \in [0, 1]^m, \\ \min(u_1, \dots, u_m) \leq h(u_1, \dots, u_m) \leq \max(u_1, \dots, u_m)$$

Le degré de priorité globale traduit une priorité moyenne calculée sur la totalité des critères.

- Enfin, il existe des opérateurs hybrides qui, selon les valeurs des  $u_j$ , adoptent une des trois attitudes précédentes.

On dispose d'un large éventail de règles d'agrégation dans chaque catégorie distinguée. Notons que si les opérateurs proposés sont souvent envisagés pour réaliser une combinaison symétrique de leurs arguments, il est toutefois possible de les modifier pour prendre en compte les coefficients de pondération (cf. Perny 1992).

### 3.2 Choix d'un critère unique de synthèse pour le problème des sites

Pour classer les sites par degrés de priorité globale décroissants, nous avons envisagé principalement les opérateurs suivants :

#### 3.2.1 Opérateurs d'agrégation conjonctifs (vérifiant $P_1, P_2, P_3, P_4$ )

Ces opérateurs permettent de faire jouer une *synergie négative importante* entre les différents critères. Ainsi, pour un site  $s_i$  donné, chaque critère accordant une faible priorité à  $s_i$  vient renforcer l'idée générale que la visite de ce site présente relativement peu d'intérêt. L'agrégation résultante consiste donc en un processus de calcul convergeant plus ou moins vite vers 0 au fur et à mesure que l'on intègre les degrés de priorité partielle. Cette caractéristique est souvent très utile lorsqu'il s'agit d'agréger les performances d'un candidat pour lequel on ne tolère aucun point faible. Toutefois, s'agissant d'agréger des degrés de priorité partielle, l'effet de synergie négative semble peu adapté notamment lorsque tous les critères s'accordent pour

donner une priorité partielle relativement élevée au site  $s_i$ . Nous ne retiendrons donc pas ces fonctions d'agrégation pour classer les sites.

### 3.2.2 Opérateurs d'agrégation disjonctifs (vérifiant $P_1, P_2, P_3, P_5$ )

Ces opérateurs permettent de faire jouer une *synergie positive importante* entre les différents critères. Ainsi, pour un site  $s_i$  donné, chaque critère accordant une priorité élevée à  $s_i$  vient renforcer l'idée générale que la visite de ce site présente beaucoup d'intérêt. L'agrégation résultante consiste donc en un processus de calcul convergeant plus ou moins vite vers 1 au fur et à mesure que l'on intègre les degrés de priorité partielle. Cette caractéristique semble très utile lorsqu'il s'agit d'agréger des degrés de priorité dans un contexte de suspicion. En effet, dans un tel contexte, il suffit d'avoir une seule bonne raison pour être convaincu de l'intérêt de la visite. Toutefois, dans notre problème, l'effet de synergie obtenu avec ces opérateurs semble trop exagéré, notamment lorsque tous les critères s'accordent pour donner une priorité partielle relativement faible au site  $s_i$ . Nous retenons donc cette idée de synergie positive sans toutefois adopter ces opérateurs.

### 3.2.3 Opérateurs d'agrégation de compromis (vérifiant $P_1, P_2, P_3, P_6$ )

Compte-tenu des observations précédentes, il nous paraît opportun de choisir l'opérateur d'agrégation au sein de cette famille. Les opérateurs les plus classiquement envisagés sont les moyennes pondérées (non associatives) de forme générale

$$f^{-1}\left(\sum_{j=1}^m w_j f(u_j)\right) \quad \text{où } f \text{ est une fonction continue et strictement monotone.}$$

*Exemples :*

$$\sum_{j=1}^m w_j u_j \quad (\text{générateur } f(x) = x)$$

*Intérêt :* Cet opérateur de *Moyenne Arithmétique Pondérée* (MAP) permet de réaliser un compromis linéaire entre les différents degrés de priorités mais ne permet pas d'intégrer les effets de synergie.

$$\prod_{j=1}^m u_j^{w_j} \quad (\text{générateur } f(x) = \ln x)$$

*Intérêt :* Cet opérateur de *Moyenne Géométrique Pondérée* (MGP) permet à la fois de réaliser un compromis entre les différents degrés de priorités et de prendre en compte de façon modérée des effets de synergie. Cependant, cette synergie est ici exclusivement négative, ce qui ne convient pas ici comme nous

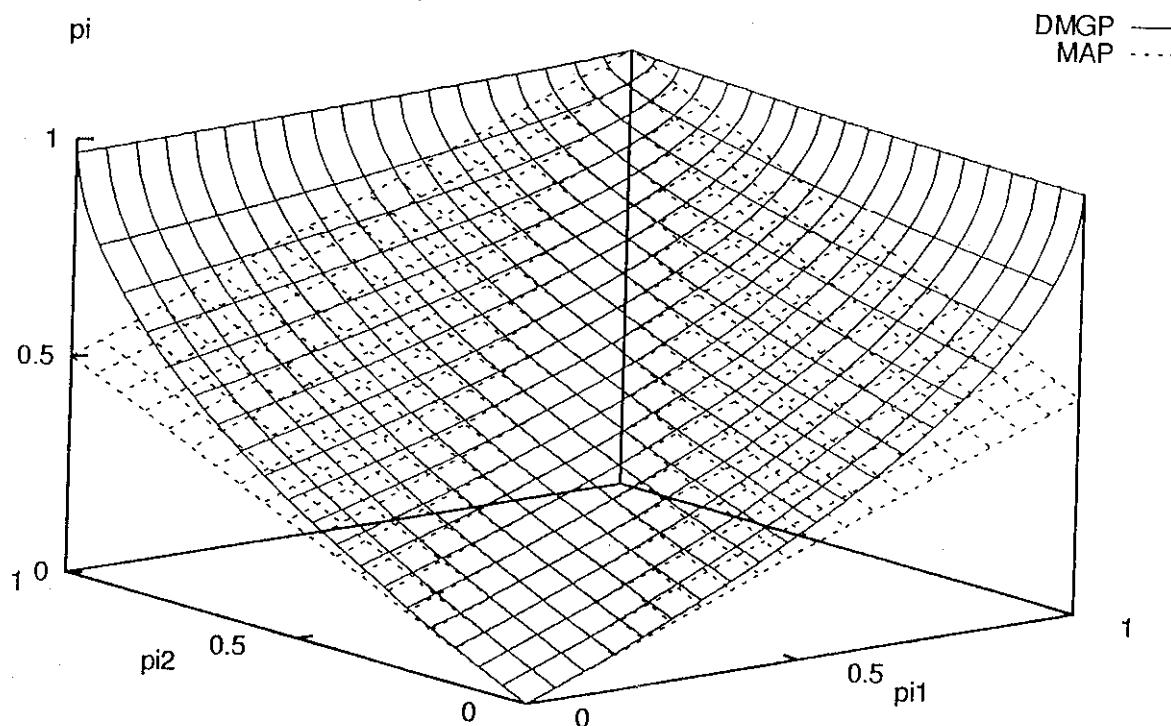


l'avons déjà souligné dans le § 3.2.1.

$$1 - \prod_{j=1}^m (1-u_j)^{w_j} \quad (\text{générateur } f(x) = \ln(1-x))$$

*Intérêt* : Cet opérateur *Dual de la Moyenne Géométrique Pondérée* (DMGP) permet à la fois de réaliser un compromis entre les différents degrés de priorités et de prendre en compte de façon modérée des effets de synergie positive. Pour ces raisons, l'opérateur DMGP nous semble particulièrement adapté pour agréger des degrés de priorité partielle. C'est donc celui que nous retenons comme critère unique de synthèse pour classer les sites.

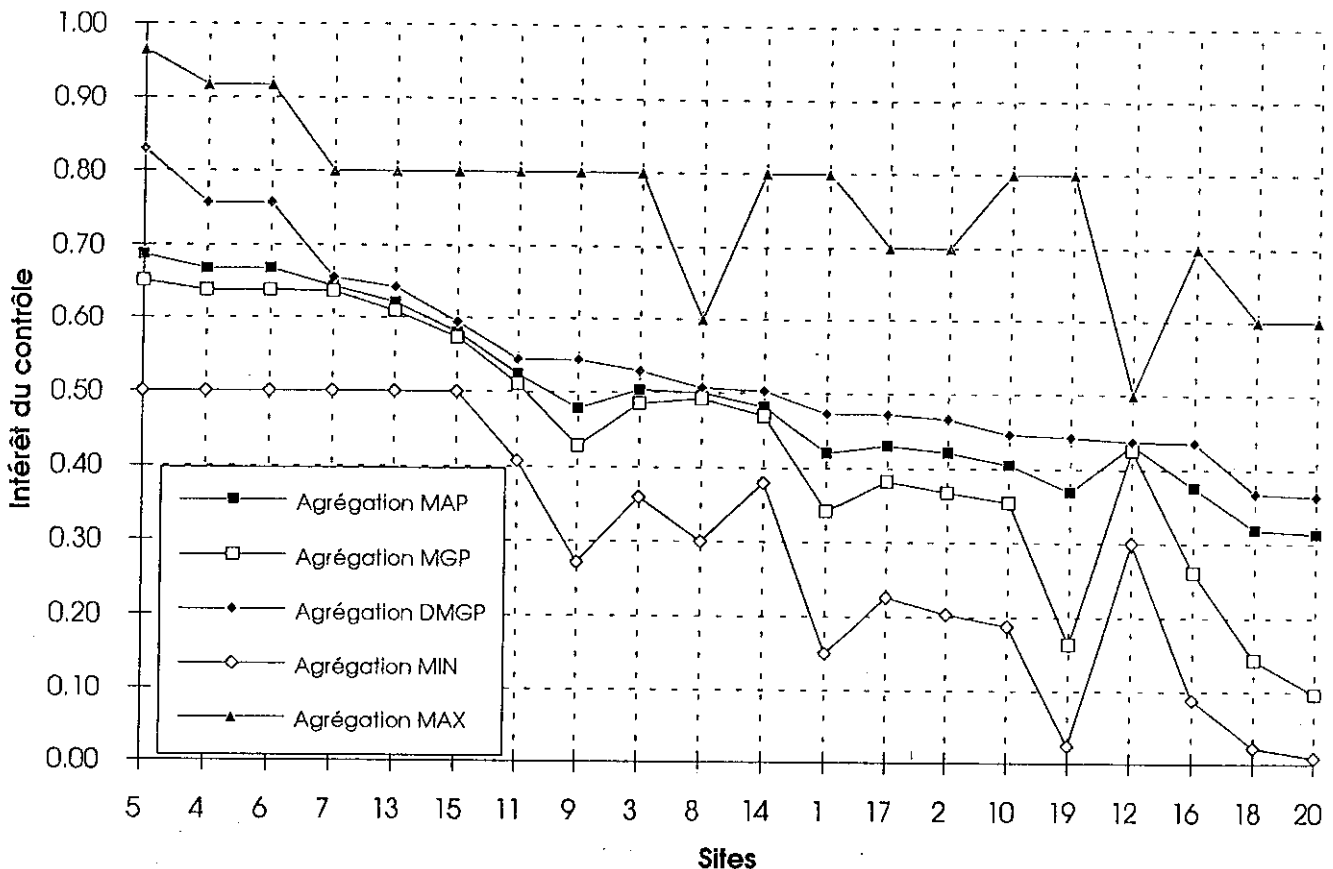
Nous présentons ci-après une représentation graphique illustrant l'effet de synergie positive de l'opérateur DMGP relativement à l'opérateur neutre MAP (figure 3).



**Figure 3** : Comparaison des opérateurs DMGP et MAP

### 3.3 Application à l'exemple illustratif

Nous avons testé les opérateurs d'agrégation MAP, MGP et DMGP à partir du tableau des priorités (cf. figure 2 - § 2.5). Les résultats obtenus sont présentés ci-après (figure 4).



**Figure 4 :** Comparaison des classements selon différents modes d'agrégation

La représentation graphique de ces résultats permet une visualisation très synthétique. En outre, nous avons reporté sur ce graphique :

- le résultat de l'agrégation MIN qui fournit à la fois une représentation de la borne supérieure des opérateurs conjonctifs et de la borne inférieure des opérateurs de compromis pour cet exemple,
- le résultat de l'agrégation MAX qui fournit à la fois une représentation de la borne inférieure des opérateurs disjonctifs et de la borne supérieure des opérateurs de compromis.

Ces deux courbes permettent de visualiser la zone théorique de variation des

priorités (située entre les lignes MIN et MAX) pour l'ensemble des opérateurs d'agrégation de type compromis. On peut également identifier les sites présentant un profil de priorités équilibré en repérant les sites pour lesquels les courbes MIN et MAX se rejoignent (par exemple  $s_{12}$ ). De même, il est possible d'identifier les sites présentant un profil de priorités déséquilibré en repérant les sites pour lesquels les courbes MIN et MAX sont éloignées (par exemple  $s_{19}$ ). Il va de soi que tout site présentant un profil de priorités très équilibré se verra affecter des degrés de priorité globale très voisins par les opérateurs MAP, MGP et DMGP. A l'inverse, un site présentant un profil déséquilibré se verra affecter des degrés de priorité globale plus disparates. Ainsi, on peut constater que :

- l'agrégation MGP fournit une évaluation pessimiste des priorités globales (synergies négatives),
- l'agrégation MAP fournit une évaluation neutre des priorités globale (absence de synergies positives et de synergies négatives),
- l'agrégation DMGP fournit une estimation optimiste des priorités globales (synergies positives),

Sur le graphique, les sites sont rangés par ordre de priorité décroissante selon le critère DMGP. On peut constater sur cet exemple que les deux autres opérateurs d'agrégation conduisent à des classements très similaires. Ainsi, tous les classements obtenus commencent par la liste :

$$s_5 \succ s_4 \succ s_6 \succ s_7 \succ s_{13} \succ s_{15} \succ s_{11} \succ s_9$$

Compte-tenu du mode de construction des critères, nous pouvons ajouter que les sites  $s_1, s_{17}, s_2, s_{10}, s_{19}, s_{12}, s_{16}, s_{18}, s_{20}$  qui composent la fin du classement DMGP ne méritent pas réellement d'être inspectés puisqu'ils ont reçu une priorité strictement inférieure à 0,5.

#### 4 Exploitation des résultats

A ce stade de l'analyse, nous sommes en mesure d'affecter à tout site  $s_i$  une priorité globale  $p_i$ , ce qui permet de définir naturellement un préordre complet sur l'ensemble des sites. La liste de priorités qui en résulte constitue un premier résultat important qui pourrait être exploité tel quel.

Soulignons toutefois qu'une exploitation directe de ce préordre complet soulève quelques difficultés. En effet, compte-tenu de la part d'arbitraire irréductible qui affecte d'une part les évaluations des priorités partielles, d'autre part les coefficients d'importance  $w_j$  dont l'impact est déterminant sur le classement final, il semble difficile de conférer au critère de synthèse "*priorité globale*" un pouvoir discriminant absolu. Nous proposons donc un mode d'exploitation des degrés de priorité qui vise à :

- garantir que la sélection des sites est *robuste* (au sens où ces sites restent prioritaires lorsque l'on fait varier, de façon raisonnable, les paramètres principaux de l'analyse) ;
- restreindre le pouvoir discriminant absolu conféré à ce critère de synthèse (afin d'éviter des discriminations quelque peu abusives fondées sur des écarts de priorité très faibles).

#### 4.1 Exploitation robuste des résultats

Plutôt que de tester la robustesse éventuelle d'un résultat, il s'agit ici de concevoir une procédure d'exploitation garantissant des résultats robustes. Cette robustesse est appréciée vis-à-vis de variations concernant les coefficients d'importance. Plutôt que de s'en tenir à un classement complet par ordre de priorité, nous allons utiliser ce classement pour fonder une sélection robuste d'un ensemble réduit de sites très intéressants à visiter. Ceci nous amène à exploiter notre degré de priorité global en définissant une structure d'ordre d'intervalle sur les sites. La façon d'utiliser cette structure pour déterminer les sites à visiter en priorité est particulièrement aisée, comme nous le verrons au § 4.2.

##### 4.1.1 Constitution d'intervalles de priorité sur les sites

La part d'indétermination qui subsiste dans l'évaluation des priorités partielles et surtout dans celle d'un vecteur poids induit une imprécision irréductible dans l'évaluation des priorités globales. Ne pas tenir compte de cette imprécision rendrait le classement arbitraire, bien que discriminant. Afin de garantir une certaine robustesse dans la comparaison des sites, il semble préférable d'envisager la priorité globale d'un site comme un intervalle de valeurs vraisemblables plutôt que comme une quantité ponctuelle.

Dans un premier temps, compte-tenu de l'indétermination relativement importante qui affecte les poids, il s'agit de définir des plages de variation raisonnables autour de chacun des poids  $w_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Ces plages sont représentées à l'aide d'intervalles de la forme  $[w_j^-, w_j^+]$ . L'amplitude de ces intervalles se répercute sur l'évaluation des priorités globales et influe directement sur le caractère robuste et discriminant de la procédure. Ainsi, afin de garantir une certaine robustesse dans la comparaison des priorités globales, il importe de choisir des intervalles d'amplitude suffisamment élevée. Cependant, considérer des intervalles trop étendus aurait pour effet de supprimer le pouvoir discriminant du critère priorité globale.

Après plusieurs essais, nous avons choisi ici d'autoriser des variations de plus ou moins 20% autour de chaque valeur initiale  $w_j$  ce qui nous a permis d'obtenir un compromis satisfaisant entre robustesse et discrimination (cf. figure 5). On obtient alors les intervalles suivants :

$$w_1 \in [0.08, 0.12], w_2 \in [0.32, 0.48], w_3 \in [0.24, 0.36], w_4 \in [0.16, 0.24]$$

Il s'agit ensuite de déterminer les priorités minimales et maximales ( $p_i$  et  $p_i^*$ ) que peut se voir attribuer chaque site  $s_i$  lorsque le vecteur poids décrit l'espace délimité par les plages de variation. Pour cela, lorsque l'on recourt à l'opérateur DMGP, il convient de considérer, pour chaque site  $s_i$ , les programmes mathématiques suivants :

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad 1 - \prod_{j=1}^m (1 - p_{ij})^{w_j} \\ \text{s.c.} \quad \sum_{j=1}^m w_j = 1 \\ \quad \quad w_j^- \leq w_j \leq w_j^+ \quad (j=1, \dots, m) \end{array} \right. \quad (P_2) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad 1 - \prod_{j=1}^m (1 - p_{ij})^{w_j} \\ \text{s.c.} \quad \sum_{j=1}^m w_j = 1 \\ \quad \quad w_j^- \leq w_j \leq w_j^+ \quad (j=1, \dots, m) \end{array} \right.$$

On peut alors résoudre les programmes linéaires équivalents suivants :

$$(P'_1) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \sum_{j=1}^m w_j \ln(1 - p_{ij}) \\ \text{s.c.} \quad \sum_{j=1}^m w_j = 1 \\ \quad \quad w_j^- \leq w_j \leq w_j^+ \quad (j=1, \dots, m) \end{array} \right. \quad (P'_2) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \sum_{j=1}^m w_j \ln(1 - p_{ij}) \\ \text{s.c.} \quad \sum_{j=1}^m w_j = 1 \\ \quad \quad w_j^- \leq w_j \leq w_j^+ \quad (j=1, \dots, m) \end{array} \right.$$

Notons que la résolution de ces programmes linéaires est immédiate puisqu'il s'agit de problèmes de sac-à-dos à variables continues bornées.

Les quantités  $p_i$  et  $p_i^*$  sont les valeurs optimales de la fonction objectif dans les programmes  $(P_1)$  et  $(P_2)$  respectivement. Afin de caractériser le site  $s_i$ , nous considérons dorénavant l'intervalle  $[p_i, p_i^*]$  au lieu de la seule valeur  $p_i$ .

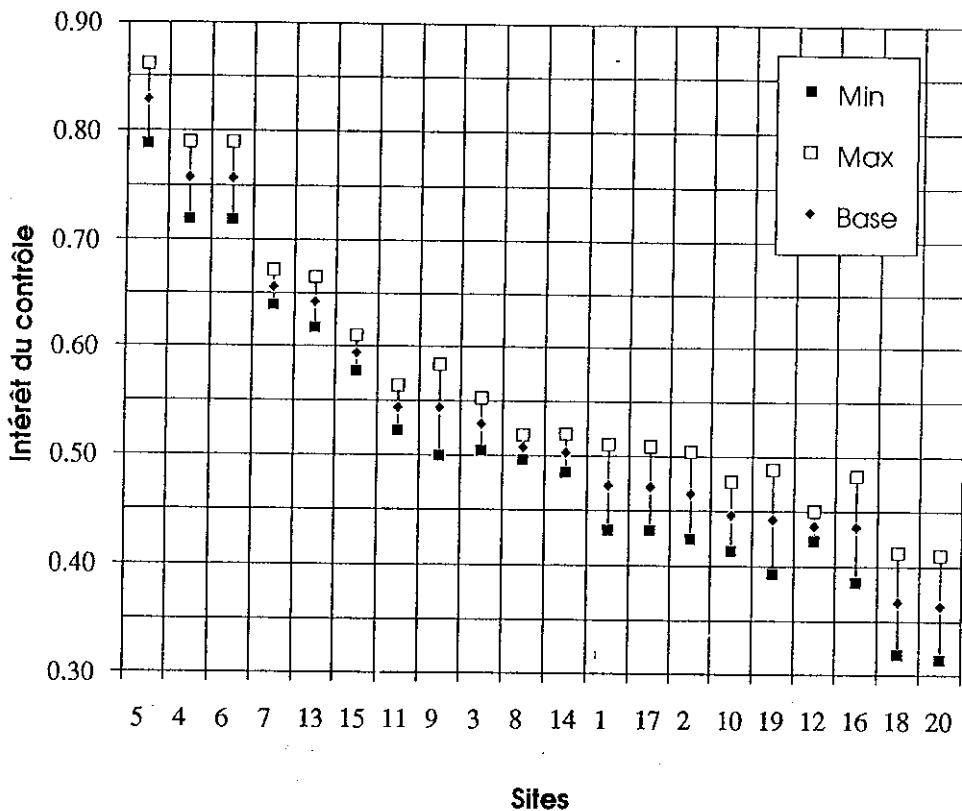
Le schéma présenté figure 5 constitue une représentation graphique des intervalles pour l'ensemble des 20 sites intervenant dans l'exemple illustratif. Ceux-ci sont ordonnés selon les degrés de priorité  $p_i$  initialement déterminés. Cette représentation graphique suggère clairement que, bien que le préordre initialement établi semble globalement conforté, l'on pourrait souhaiter procéder localement à certaines inversions ou, tout au moins, considérer comme indifférents des sites initialement discriminés.

#### 4.1.2 Comparaison des intervalles de priorité

Les remarques précédentes indiquent qu'il convient de disposer maintenant de moyens de comparer ces sites définis par des intervalles. La comparaison de deux sites  $s_k$  et  $s_l$  conduit à examiner si, compte-tenu de toutes les priorités que peuvent se voir attribuer ces deux sites, il est justifié de conclure que  $s_k$  est au moins aussi prioritaire que  $s_l$ . Pour ce faire, on définit comme suit une relation  $H$  de sémantique "est au moins aussi prioritaire que" :

$$s_k H s_l \Leftrightarrow p_k^+ \geq p_l^-$$

Cette relation  $H$  définit une structure d'ordre d'intervalle sur l'ensemble  $S$  des sites.



**Figure 5 :** Ordre d'intervalle construit à partir de l'opérateur DMGP

Décomposons  $H$  en sa partie asymétrique  $P$ , dont la sémantique est "est de priorité strictement supérieure à", et sa partie symétrique  $I$ , dont la sémantique est "est de même priorité que" ( $H = P \cup I$ ).

La relation  $P$  est donc définie de la façon suivante :

$$s_k P s_l \Leftrightarrow p_l^+ < p_k^-$$

En d'autres termes, un site  $s_k$  est de priorité strictement supérieure à un site  $s_l$  dès lors que leurs intervalles respectifs sont disjoints, tous les degrés de priorité de  $s_k$  étant strictement supérieurs à ceux de  $s_l$ .

La relation  $I$  est définie de la façon suivante :

$$s_k I s_l \Leftrightarrow p_k^+ \geq p_l^- \text{ et } p_l^+ \geq p_k^-$$

En d'autres termes, un site  $s_k$  est de même priorité qu'un site  $s_l$  dès lors que leurs intervalles respectifs ont une intersection non vide.

Lorsque l'on compare ainsi deux intervalles correspondant à deux sites, toute évaluation située à l'intérieur du premier intervalle est susceptible d'être comparée à toute évaluation située à l'intérieur du second, indépendamment des jeux de poids qui ont conduit à ces évaluations. Il s'agit là d'un parti pris volontaire qui traduit l'idée d'un mode d'agrégation produisant des valorisations par intervalle, par nature plus robustes que toute évaluation ponctuelle dont la précision n'est en fait qu'illusoire.

Notons qu'une autre optique intéressante, mais qui s'éloigne à notre sens de l'idée de robustesse, consisterait à n'accepter de comparer des évaluations internes à deux intervalles que lorsqu'elles proviennent de l'application du même jeu de poids. Il pourrait alors se produire que, dans certains cas d'intervalles non disjoints mais non inclus (par exemple pour deux sites  $s_k$  et  $s_l$  tels que  $p_k^+ > p_l^+ > p_k^- > p_l^-$ ), on aboutisse à une discrimination non justifiable par la relation  $H$  qui, elle, conduit à  $s_l I s_k$ . En effet, alors que l'inégalité  $p_k^+ > p_l^+$  nous assure qu'il existe un jeu de poids pour lequel  $s_k$  reçoit une priorité globale supérieure à celle de  $s_l$ , il n'existe pas nécessairement de jeu de poids tel que  $s_l$  reçoive une priorité globale supérieure à celle de  $s_k$ . On peut alors vouloir casser la relation d'indifférence en faveur de  $s_k$ . Pour établir l'existence d'une telle configuration, il suffit de tester l'existence d'une solution réalisable de valeur positive dans le programme linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{j=1}^m w_j (\ln(1 - p_{kj}^-) - \ln(1 - p_{lj}^+)) \\ \text{s.c. } \sum_{j=1}^m w_j = 1 \\ w_j^- \leq w_j \leq w_j^+ \quad (j=1, \dots, m) \end{array} \right.$$

Lorsque la fonction objectif est positive à l'optimum, on peut conclure que  $s_k$  est de priorité supérieure à  $s_l$ . On pourrait ainsi construire une autre relation  $P'$  plus discriminante que  $P$ .

**Exemple :** Considérons les sites  $s_7$  et  $s_{13}$  caractérisés respectivement par les intervalles  $[0.64, 0.67]$  et  $[0.61, 0.66]$ . Contre toute apparence, il n'existe pas de jeux de poids admissible (respectant les contraintes de bornes) tels que la priorité globale du site  $s_{13}$  soit supérieure ou égale à celle de  $s_7$ . Le jeu de poids admissible minimisant l'écart de priorité entre  $s_7$  et  $s_{13}$  est  $(0.12, 0.48, 0.24, 0.16)$  avec les priorités  $p_7 = 0,67$  et  $p_{13} = 0,66$ .

Dans la suite de cet article, nous nous baserons uniquement sur les relations  $P$  et  $I$  issues de  $H$ .

#### 4.1.3 Exploitation de l'ordre d'intervalle défini sur les sites

Une fois que l'ordre d'intervalle est défini, il importe de l'exploiter afin de guider le choix des sites à vérifier. Pour ce faire, il convient de se conformer à la méthode de répartition des inspections. Celle-ci conduit à effectuer les choix par groupes restreints de sites. De plus, certains des sites jugés initialement prioritaires peuvent avoir été sélectionnés antérieurement par d'autres pays alliés.

La situation typique de décision à laquelle se trouvent confrontés les responsables du choix peut donc se formaliser comme suit :

Soit  $S' \subset S$  l'ensemble des sites non encore choisis, déterminer un sous-ensemble de  $S'$ , aussi restreint que possible, contenant les sites prioritaires.

Il suffit pour cela de retenir les sites  $s' \in S'$  tels que :

$$\forall s \in S' \quad \text{non } (s P s')$$

ou, de façon équivalente, les sommets de rang 0 dans le graphe  $G' = (S', P)$ .

Nous indiquons au § 4.2 comment déterminer ces sites de façon simple et rapide.

ex.: Si  $S' = S$ , on choisira  $\{s_5, s_4, s_6\}$ .

Si  $S' = S \setminus \{s_5, s_4, s_6\}$ , les sites candidats sont  $s_7$  et  $s_{13}$ .

On constate qu'à la différence du classement fondé sur les priorités initiales, on ne juge pas pertinent de discriminer entre les sites  $s_5, s_4, s_6$  d'une part et les sites  $s_7$  et  $s_{13}$  d'autre part.

Nous indiquons ci-dessous la partition ordonnée de l'ensemble des sites qui serait obtenue si l'on sélectionnait, par choix répété sur l'ensemble résiduel, les sites de rang 0. Les sites appartenant à une même classe étant nécessairement indifférents et les classes étant ordonnées par l'existence d'au moins une relation de préférence joignant certains sites, cette partition peut être considérée comme un préordre complet naturellement associé à l'ordre d'intervalle. Il s'agit là d'une information



complémentaire qui pourrait être présentée aux responsables du choix préalablement aux sessions.

Classe 1 :	$s_5, s_4, s_6$
Classe 2 :	$s_7, s_{13}$
Classe 3 :	$s_{15}, s_9$
Classe 4 :	$s_{11}, s_3, s_8, s_{14}$
Classe 5 :	$s_1, s_{17}, s_2, s_{10}, s_{19}, s_{16}, s_{12}$
Classe 6 :	$s_{18}, s_{20}$

## 4.2 Mise en oeuvre pratique

L'approche que nous préconisons a été conçue de façon à satisfaire certaines exigences théoriques mais également dans l'esprit d'une mise en oeuvre pratique simple. Cette phase d'exploitation peut en effet s'effectuer manuellement, en quelques instants, par les responsables du choix lorsqu'ils assistent aux séances de sélection.

Rappelons que, dans le cas général, au moins deux listes de priorités peuvent avoir été conçues de façon indépendantes (Armée de Terre, Armée de l'Air,...). Après avoir indiqué comment exploiter pratiquement une liste de priorités, nous montrons comment intégrer des contraintes additionnelles.

### 4.2.1 Exploitation pratique d'une liste

Il s'agit ici de mettre en oeuvre pratiquement la procédure de sélection décrite au § 4.1.3 afin de faire émerger les sites les plus prioritaires d'une liste. Le seul support à manipuler est la représentation graphique des priorités (cf. figure 5).

Les étapes à suivre, lors d'une session de sélection, sont les suivantes :

1. supprimer du graphique les sites déjà sélectionnés,
2. déplacer une ligne horizontale du haut vers le bas jusqu'à ce que la limite inférieure d'un intervalle apparaisse,
3. retenir comme candidats tous les sites dont l'intervalle chevauche la ligne.

Notons que ces étapes sont particulièrement simples à mettre en oeuvre, même sans recourir à un support informatique.

### 4.2.2 Insertion de la méthodologie proposée dans le cadre de la répartition des inspections au sein de l'Alliance

Le travail de modélisation et l'agrégation multicritère réalisés pour évaluer les priorités des sites abritant des formations de l'armée de terre peuvent bien sûr être

reproduits pour d'autres types de formation. Nous pouvons donc constituer un classement des sites concernant l'armée de l'air, par ordre de priorité décroissante. Là encore, la procédure de sélection proposée au § 4.1.3 peut être utilisée avec profit pour faire émerger les sites les plus prioritaires parmi ceux concernant l'armée de l'air. Le décideur peut donc disposer d'une sélection pour chaque armée contenant les sites candidats les plus intéressants pour le prochain choix dans le tour de table.

Cette sélection constitue une information à la fois simple et riche qui nous semble suffisante pour aider le décideur à se déterminer en situation réelle. Afin de préserver un relatif équilibre (par exemple géographique) dans les visites retenues, on peut fixer des bornes inférieures et supérieures délimitant le nombre de visites à effectuer pour certaines catégories de sites (par exemple des zones géographiques). Or, la prise en compte de contraintes de ce type peut éventuellement s'avérer délicate pour le décideur s'il ne bénéficie pas de plus amples informations. Selon nous, deux aspects principaux sont à prendre en compte :

- le fait qu'un site candidat puisse occasionner un dépassement d'une borne supérieure est suffisant pour l'éliminer définitivement de la liste des candidats sélectionnés,
- la politique de sélection doit viser à privilégier le choix d'un site permettant de rehausser les nombres de visite dans les catégories pour lesquelles on reste très en deçà des bornes inférieures que l'on s'est donné.

Pour cela, nous proposons de suivre la démarche élémentaire suivante :

1. Pour chaque catégorie  $k$  distinguée, fixer des bornes inférieures  $BI_k$  et supérieures  $BS_k$  de façon raisonnable (pour les régions sur lesquelles on ne désire pas exprimer de contraintes, fixer  $BI_k = 0$  et  $BS_k = +\infty$ ).
2. Calculer, pour chaque catégorie  $k$ , le nombre  $N_k$  de sites choisis dans les tours précédents et appartenant à cette catégorie. Puis, pour tout site candidat  $s_i$ , calculer le nombre  $N_k(s_i)$  auquel on parviendrait pour la catégorie  $k$  si on retenait effectivement  $s_i$  en plus des sites choisis aux tours précédents ( $N_k(s_i) = N_k + 1$  si le site  $s_i$  appartient à la catégorie  $k$ ,  $N_k(s_i) = N_k$  sinon).
3. Eliminer de la sélection tous les sites  $s_i$  tels  $N_k(s_i) > BS_k$  pour au moins une catégorie  $k$ .
4. Pour tout site  $s_i$  restant dans la sélection, calculer la quantité  $\mu(s_i)$  évaluant l'intérêt que présente la sélection du site  $s_i$  quant à sa propension à satisfaire les contraintes de bornes liées aux quantités  $BI_k$ . La fonction  $\mu$  est définie ainsi :

$$\mu(s_i) = \sum_{k : N_k < BI_k} (BI_k - N_k) \cdot (N_k(s_i) - N_k)$$

La quantité  $\mu(s_i)$  est définie comme une somme pondérée des variations d'effectif dans chaque catégorie (repérées par les différences  $N_k(s_i) - N_k$ ). Les pondérations des écarts relatifs aux catégories sont d'autant plus élevées que la situation actuelle est loin de satisfaire les contraintes de bornes inférieures. Notons que les quantités  $\mu(s_i)$  ne sont définies que s'il reste des catégories  $k$  pour lesquelles  $N_k < BI_k$ . Dans le cas contraire, ces évaluations sont sans objet ; on peut choisir arbitrairement.

5. Sélectionner finalement le site  $s_i$  qui, parmi ceux qui restent, maximise la fonction  $\mu$ .

## 5 Conclusion

La méthodologie que nous proposons permet non seulement d'évaluer les sites candidats de façon relative mais aussi de quantifier de manière absolue (intrinsèque) le caractère prioritaire de chaque visite envisagée. Elle se concrétise par la donnée, pour chaque type de site (armée de Terre, armée de l'Air), d'un *ordre d'intervalle* permettant d'ordonner les sites comparables par priorité décroissante et de regrouper certains d'entre eux non significativement distincts. La constitution de cet ordre d'intervalle repose sur une approche originale visant à prendre en compte a priori le caractère imprécis et mal déterminé des paramètres préférentiels (poids). Les recommandations ainsi conçues restent robustes pour toute variation plausible de ces paramètres.

Cet ordre d'intervalle est représenté de façon très lisible par un graphique permettant d'aider le décideur à opérer des choix en temps réel compte-tenu des contraintes exogènes qu'il se doit d'intégrer (contraintes par catégorie, réduction progressive de l'ensemble des sites candidats). Le décideur reste toutefois libre de la décision finale et conserve à chaque tour la possibilité :

- d'arbitrer préalablement entre les différents types de sites (armée de Terre, armée de l'Air) ou de composer une sélection mixte, réunion des sélections de chaque classement ;
- de choisir le site le mieux adapté compte-tenu non seulement des classements présentés sur les graphiques, des sélections robustes issues de ces classements et des indications supplémentaires relatives au respect des bornes par catégorie mais aussi de ses convictions propres.

Signalons que cette méthodologie a été initialement conçue pour guider les

choix français. Néanmoins, compte-tenu de sa portée générale, elle peut être adaptée sans difficulté par chacun des pays alliés. Les seules modifications à envisager concernent les critères qu'il convient éventuellement de redéfinir ainsi que leur pondération.

En outre, nous avons développé, dans le cadre de cette application, une approche originale et de portée générale permettant de prendre en compte de manière robuste l'imprécision et l'indétermination affectant l'information préférentielle. Celle-ci se fonde, dans le cadre d'une agrégation par critère unique de synthèse, sur la construction et la comparaison d'évaluations non ponctuelles (intervalles).

Cette approche qui prend délibérément le parti de limiter le pouvoir discriminant d'un critère de synthèse permet d'établir des conclusions plus robustes. Elle contourne ainsi en partie un problème majeur généralement rencontré lors de l'utilisation d'un critère unique de synthèse. Une réflexion théorique plus générale sur cette approche est présentée dans Perny et Vanderpooten (1996).

## Références

- Avenhaus, R., Von Stengel, B., (1991), "Verification of attributes and variables: perfect equilibria and inspector leadership" in *Defense Decision Making*, R. Avenhaus, H. Karkar, M. Rudnianski (eds.), Proceedings of the First ARESAD International Conference, Paris Nov. 1989, Springer-Verlag, Berlin, 296-317.
- Bana e Costa, C., (1992), "Absolute and relative evaluation problematiques: the concept of neutral level and the MCDA Robot technique", in *Multicriteria Decision Making: methods, algorithms, applications*, M. Cerny, D. Gluckaufova, D. Loula (eds.), Proceedings of the International Workshop - Liblice - Czechoslovakia, Mars 1991, 7-15.
- Brams, S.J., Davis, M.D., Kilgour, D.M., (1991), "Optimal Cheating and inspection Strategies under INF", in *Defense Decision Making*, R. Avenhaus, H. Karkar, M. Rudnianski (eds), Proceedings of the First ARESAD International Conference, Paris Nov. 1989, Springer-Verlag, Berlin, 318-335.
- Dubois, D., Prade, H., (1984), "Criteria aggregation and ranking of alternatives in the framework of fuzzy set theory, dans *Fuzzy Sets and Decision Analysis*, H.J. Zimmermann, L.A. Zadeh, B.R. Gaines, (eds.), TIMS Studies in Management Sciences, North-Holland, **20**, 209-240.
- Dubois, D., Prade, H., (1985), "A review of Fuzzy Set Aggregation Connectives", *Information Sciences*, **36**, 85-121.
- Perny, P., 1992, "Modélisation agrégation et exploitation de préférences floues dans une problématique de rangement : bases axiomatiques procédures et logiciels", Thèse de Doctorat de l'Université Paris-Dauphine et document du LAFORIA N° 9.
- Perny, P., Vanderpooten, D., (1996), "Elaboration of stable prescriptions for decision aid", contribution nationale IFORS'96, Vancouver.